Estructuras Algebraicas Primer examen parcial	1^{er} Apellido: ____________	17 de abril de 2015
	2^{o} Apellido: ____________	Tiempo 2 h.
Departamento Matem. aplic. TIC ETS de Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	**Calificación:**

1. (2 puntos) Sea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 1 & 8 & 2 & 9 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

   a) Expresar σ en forma de producto de ciclos disjuntos. Determinar si $\sigma \in A_9$.

   b) Calcular el orden de σ. Obtener, en forma de producto de ciclos disjuntos, la permutación σ^{100}

2. (2 puntos) Sea $T = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a \cdot c \neq 0\}$ y $U = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$.

   a) Demostrar que $U \leq T$

   b) Estudiar si $U \trianglelefteq T$

3. (3 puntos) Describir todos los homomorfismos de $\mathbb{Z}_{15}$ en $\mathbb{Z}_{18}$ y para cada uno de ellos:

   a) Calcular su núcleo y su imagen.

   b) Obtener todos los elementos $[a]_{15} \in \mathbb{Z}_{15}$ tales que su imagen es $[12]_{18}$.

4. (3 puntos) Se considera el grupo $(G_3, *) = (\mathbb{Z}_4 \times U_{12}, (+_4, \cdot_{12}))$ y el subgrupo $H_3 = \langle([2]_4, [5]_{12})\rangle$.

   a) Demostrar que $H_3 \trianglelefteq G_3$.

   b) Describir cada uno de los elementos del grupo cociente G_3/H_3.

   c) Calcular el orden de cada elemento de G_3/H_3.

   d) Obtener los factores invariantes de G_3/H_3.

   e) Estudiar razonadamente si $G_3/H_3 \approx U_{24}$

   f) Calcular los divisores elementales y los factores invariantes de $G_4 = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_{18}$

Solución:

1. *a)* $\sigma = (1,5,2,3)(4,8)(6,9,7)$, $\sigma \in A_9$

   b) $|\sigma| = 12$, $\sigma^{100} = (6,9,7)$

2. *a)* $U \leq T$:

   1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$

   2) $\forall h_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$ es $h_1 h_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x-y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$

   b) $\forall g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T, h = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$ es $ghg^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{ax}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U \;\Rightarrow\; U \trianglelefteq T$

3. *a)* $\varphi_1 : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{18}$ definida por $\varphi_1([a]_{15}) = [0]_{18}$,
   $\varphi_2 : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{18}$ definida por $\varphi_2([a]_{15}) = [6a]_{18}$ y
   $\varphi_3 : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{18}$ definida por $\varphi_3([a]_{15}) = [12a]_{18}$

   b) $\ker(\varphi_1) = \mathbb{Z}_{15}$, $\mathrm{im}(\varphi_1) = \{[0]_{18}\}$
   $\ker(\varphi_2) = \ker(\varphi_3) = \langle [3]_{15} \rangle = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\} \approx \mathbb{Z}_5$
   $\mathrm{im}(\varphi_2) = \mathrm{im}(\varphi_3) = \langle [6]_{18} \rangle = \{[0]_{18}, [6]_{18}, [12]_{18}\} \approx \mathbb{Z}_3$

   c) $\varphi_1^{-1}([12]_{18}) = \emptyset$
   $\varphi_2^{-1}([12]_{18}) = [2]_{15} + \ker(\varphi_2) = \{[2]_{15}, [5]_{15}, [8]_{15}, [11]_{15}, [14]_{15}\}$
   $\varphi_3^{-1}([12]_{18}) = [1]_{15} + \ker(\varphi_3) = \{[1]_{15}, [4]_{15}, [7]_{15}, [10]_{15}, [13]_{15}\}$

4. *a)* $(G_3, *)$ es un grupo abeliano, por tanto todos sus subgrupos son normales. En particular $H_3 \trianglelefteq G_3$

   b) $G_3/H_3 = \{([0]_4,[1]_{12})H_3,\ ([0]_4,[5]_{12})H_3,\ ([0]_4,[7]_{12})H_3,\ ([0]_4,[11]_{12})H_3,\ ([1]_4,[1]_{12})H_3,$
   $([1]_4,[5]_{12})H_3,\ ([1]_4,[7]_{12})H_3,\ ([1]_4,[11]_{12})H_3\}$,
   siendo:
   $([0]_4,[1]_{12})H_3 = \{([0]_4,[1]_{12})\ ([2]_4,[5]_{12})\}$, $([1]_4,[1]_{12})H_3 = \{([1]_4,[1]_{12})\ ([3]_4,[5]_{12})\}$,
   $([0]_4,[5]_{12})H_3 = \{([0]_4,[5]_{12})\ ([2]_4,[1]_{12})\}$, $([1]_4,[5]_{12})H_3 = \{([1]_4,[5]_{12})\ ([3]_4,[1]_{12})\}$,
   $([0]_4,[7]_{12})H_3 = \{([0]_4,[7]_{12})\ ([2]_4,[11]_{12})\}$, $([1]_4,[7]_{12})H_3 = \{([1]_4,[7]_{12})\ ([3]_4,[11]_{12})\}$,
   $([0]_4,[11]_{12})H_3 = \{([0]_4,[11]_{12})\ ([2]_4,[7]_{12})\}$, $([1]_4,[11]_{12})H_3 = \{([1]_4,[11]_{12})\ ([3]_4,[7]_{12})\}$.

   c) El orden de cada elemento es:

$\lvert([0]_4,[1]_{12})H_3\rvert$	$\lvert([0]_4,[5]_{12})H_3\rvert$	$\lvert([0]_4,[7]_{12})H_3\rvert$	$\lvert([0]_4,[11]_{12})H_3\rvert$
1	2	2	2

$\lvert([1]_4,[1]_{12})H_3\rvert$	$\lvert([1]_4,[5]_{12})H_3\rvert$	$\lvert([1]_4,[7]_{12})H_3\rvert$	$\lvert([1]_4,[11]_{12})H_3\rvert$
4	4	4	4

   d) $G_3/H_3 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, sus divisores elementales y sus factores invariantes son $(2,4)$

   e) $U_{24} = \{[1]_{24}, [5]_{24}, [7]_{24}, [11]_{24}, [13]_{24}, [17]_{24}, [19]_{24}, [23]_{24}\}$

$\lvert[1]_{24}\rvert$	$\lvert[5]_{24}\rvert$	$\lvert[7]_{24}\rvert$	$\lvert[11]_{24}\rvert$	$\lvert[13]_{24}\rvert$	$\lvert[17]_{24}\rvert$	$\lvert[19]_{24}\rvert$	$\lvert[23]_{24}\rvert$
1	2	2	2	2	2	2	2

   $$U_{24} \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

   Sus factores invariantes son $(2,2,2) \Rightarrow U_{24} \not\approx G_3/H_3$

   f) $G_4 \approx \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \approx \mathbb{Z}_{180} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_3$
   Sus divisores elementales son $(2,4,3,9,9,5)$ y sus factores invariantes: $(180,18,3)$